Récupération bosonique structurée : réduction scalaire et certificats rationnels

Zakaria Gharzouli
Residual Labs, Moissy-Cramayel, France
ORCID : 0009-0005-7604-4709 • contact@residual-labs.fr
Prépublication v1 - 1 novembre 2026 - CC BY 4.0

Résumé

Nous étudions la récupération déterministe optimale d'un qubit encodé dans les niveaux 0, L et 2L d'un oscillateur, après un canal composé de décalages de nombre vers le bas. Pour un nombre fini arbitraire de Kraus par secteur, nous ramenons le problème à des contributions explicites et à une minimisation convexe scalaire, sous deux conditions de non-dégénérescence précisées. La preuve conserve les contraintes de trace partielle et traite les faces optimales non projectives. Le cas d'un Kraus par perte admet également une formulation concave en deux variables. Des témoins rationnels encadrent les fidélités sans utiliser les tolérances d'un solveur comme preuve. Un exemple exclut toute récupération dont un effet central défini est projectif, avec un écart prouvé supérieur à 0,00000180685. Les comparaisons historiques avec des SDP denses constituent des contrôles numériques, pas une preuve de supériorité de performance. À notre connaissance, non trouvé dans les sources consultées : une formulation exactement équivalente à la réduction scalaire présentée ici ; cette recherche limitée n'établit pas la priorité scientifique.

Mots-clés : récupération quantique ; code bosonique ; programmation semi-définie ; certificats rationnels ; effet non projectif.

Abstract

We study optimal deterministic recovery of a qubit encoded in oscillator levels 0, L and 2L under finite families of downward number-shift Kraus operators. Under explicit non-degeneracy assumptions, the recovery SDP reduces to closed-form sector contributions and a one-dimensional convex minimization. The proof preserves partial-trace constraints and includes fractional optimal effects. A single-Kraus-per-loss specialization also yields a two-variable concave formulation. Rational witnesses prove fidelity intervals and a strict separation from all recoveries with a specified projective central effect. Historical comparisons with dense SDPs validate small cases numerically. Neither a public performance advantage nor bibliographic priority is established.

1. Périmètre et travaux antérieurs

Optimiser une récupération CPTP par SDP est établi par Fletcher, Shor et Win [FSW07]. Les optimisations itératives de codage et décodage [Reimpell05] et les récupérations approchées avec garanties [Barnum02] sont également antérieures. Les récupérations structurées et leurs bornes duales [FSW08], ainsi que la correction adaptée au canal d'amortissement d'amplitude [FSWAD08], constituent des antécédents directs. Le code (1) est un code binomial de la famille de [Michael16]. Albert et al. [Albert18] calculent déjà par SDP des récupérations optimales de ces codes sous perte pure. Le canal perte-déphasage appartient à la littérature [Leviant22]. Notre objet est un encodage fixé, une famille de canaux définie et des certificats pour cette optimisation.

démontré désigne ci-dessous une preuve rédigée sous des hypothèses explicites ou un certificat exact contrôlable. Aucune formalisation dans un assistant de preuve ni évaluation indépendante par les pairs n'est annoncée. **vérifié numériquement** désigne les calculs et observations sur les cas spécifiés. **conjecturé** désigne seulement les perspectives non établies.

2. Modèle, convention de Choi et encodage

Fixons un entier $L \geq 2$, $D = 2L + 1$ et l'isométrie V définie par :

$$|0_L\rangle = (|0\rangle + |2L\rangle)/\sqrt{2}, \quad |1_L\rangle = |L\rangle. \qquad (1)$$

Le canal possède des Kraus $E_{\ell\alpha} = \sum_{n=\ell}^{2L} a_{\ell\alpha n}|n-\ell\rangle\langle n|$, avec un nombre fini de α par ℓ, et $\sum_{\ell \leq n,\alpha}|a_{\ell\alpha n}|^2 = 1$ pour chaque n. Chaque opérateur possède un décalage fixé. Les gains de photons et les canaux sans représentation de cette forme sont hors périmètre. La dimension D est exacte pour ce canal et cet encodage ; aucune queue peuplée n'est tronquée.

Pour une récupération de Kraus R_j, la quantité optimisée est :

$$F_{opt} = \max (1/4) \sum_{j,\ell,\alpha} |\mathrm{Tr}(R_j E_{\ell\alpha} V)|^2, \quad \sum_j R_j^\dagger R_j = I_D. \qquad (2)$$

Il s'agit de la fidélité d'intrication à entrée logique $I_2/2$, sans post-sélection. Indexons le Choi par (a,n), sortie logique a et entrée physique n. Posons $v_{\ell\alpha}[a,n] = \mathrm{conj}((E_{\ell\alpha}V)[n,a])$, $W_\ell = \sum_\alpha v_{\ell\alpha} v_{\ell\alpha}^\dagger$ et $W = \sum_\ell W_\ell$. Alors :

$$F_{opt} = \max \{ \mathrm{Tr}(WJ)/4 : J \succcurlyeq 0, \mathrm{Tr}_{\mathrm{sortie}}\, J = I_D \}. \qquad (3)$$

Le Choi est $J = \sum_j \mathrm{vec}(R_j)\mathrm{vec}(R_j)^\dagger$, dans le même ordre (a,n). Cette convention fixe les conjugaisons dans les données de Gram.

3. Pincement compatible et compilation

Proposition 1 - démontré. Le pincement P_Π d'une partition de coordonnées conserve la contrainte $\mathrm{Tr}_{\mathrm{sortie}} J = I_D$ pour tout Choi faisable si et seulement si, pour toute paire n,m, l'indicateur « (a,n) et (a,m) appartiennent au même bloc » est indépendant de a. Si $W = P_\Pi W$, la restriction à ces blocs conserve l'optimum de (3).

Preuve. Le pincement est positif et conserve la diagonale. Pour $n \neq m$, tous les termes de $\sum_a J[(a,n),(a,m)]$ sont simultanément conservés ou supprimés ; leur somme reste nulle. L'objectif est invariant lorsque W a le même support par blocs. Réciproquement, partons de $I_2 \otimes I_D/2$, strictement positif. Deux petites perturbations hermitiennes opposées, placées dans deux sorties différentes sur une même paire n,m, conservent la trace partielle. Si les indicateurs diffèrent, une seule perturbation survit et la contrainte est violée. Ceci prouve la nécessité.

Le compilateur part des composantes du support exact de W. Chaque paire réunie dans une sortie est réunie dans toutes les sorties ; on répète jusqu'au point fixe. Chaque fusion est obligatoire dans toute partition admissible qui contient ce support. Par induction, le résultat est la plus fine partition dans cette classe de regroupements de coordonnées. Cela ne recherche pas les changements de base généraux de la réduction des SDP [Gatermann04, Permenter20].

Pour le support générique du canal considéré, les blocs sont deux triplets {(0,0),(0,2L),(1,L)} et {(1,0),(1,2L),(0,L)}, L−1 paires {(0,2L−ℓ),(1,L−ℓ)}, et 2(L−1) singletons. Les triplets restent couplés par les contraintes de trace. La partition par charge n−La modulo 2L est également admissible mais peut être moins fine.

L	Paramètres réels hermitiens denses	Après partition générique
2	100	24
8	1 156	60
64	66 564	396

Ces nombres précèdent l'élimination des égalités. Leur diminution ne mesure pas un gain de temps.

4. Données de Gram et réduction primale

Dans W_0, restreint aux coordonnées (0,0),(0,2L),(1,L), écrire $W_0 = [[H,g],[g\dagger,p]]$, avec H hermitienne 2×2, et poser $V_g = gg\dagger$. Les autres coefficients sont :

$$C = (1/2)\sum_\alpha |a_{L,\alpha,2L}|^2, \quad D_0 = \sum_\alpha |a_{L,\alpha,L}|^2, \quad E = (1/2)\sum_\alpha |a_{2L,\alpha,2L}|^2,$$
$$\omega = (1/2)\left|\sum_\alpha \mathrm{conj}(a_{L,\alpha,2L})\, a_{L,\alpha,L}\right|^2. \qquad (4)$$

Lemme 3 — démontré (secteurs ordinaires). Pour $1 \le \ell < L$, définir $r_\ell = (1/2)\sum_\alpha |a_{\ell,\alpha,2L}|^2$, $s_\ell = \sum_\alpha |a_{\ell,\alpha,L}|^2$, $z_\ell = (1/2)\sum_\alpha |a_{L+\ell,\alpha,2L}|^2$ et $c_\ell = \left|\sum_\alpha \mathrm{conj}(a_{\ell,\alpha,2L})\, a_{\ell,\alpha,L}\right|/\sqrt{2}$. Poser :

$$\psi_\ell = r_\ell + s_\ell + 2c_\ell \qquad \text{si } z_\ell \le s_\ell + c_\ell,$$
$$\psi_\ell = r_\ell + z_\ell + c_\ell^2/(z_\ell - s_\ell) \qquad \text{sinon.} \qquad (5)$$

En effet, le secteur ordinaire maximise $r_\ell + z_\ell + (s_\ell - z_\ell)v + 2c_\ell\sqrt{v}$ sur $0 \le v \le 1$. La positivité borne la cohérence par la racine du produit des diagonales ; cette borne est atteignable. La dérivée donne (5), avec $v = 1$ ou $c_\ell^2/(z_\ell - s_\ell)^2$. Les cas nuls suivent par continuité.

Proposition 4 — démontré (réduction primale). Dans les triplets centraux, les contraintes imposent deux effets M et I−M, $0 \preccurlyeq M \preccurlyeq I_2$, et deux diagonales 1−u et u. Avec $t = M_{00}$, leur score maximal est :

$$T(M,u) = \mathrm{Tr}(HM) + p(1-u) + Cu + D_0(1-t) + Et$$
$$+ 2\sqrt{((1-u)\mathrm{Tr}(V_g M))} + 2\sqrt{(\omega u(1-t))}. \qquad (6)$$

Les inégalités de Schur sont saturées par les colonnes proportionnelles à Mg et (I−M)h, où h est la cohérence du second triplet et $|h_0|^2 = \omega$, $h_1 = 0$. Si une norme s'annule, la colonne correspondante est nulle. Les deux saturations sont simultanément compatibles. Donc, y compris dans les cas dégénérés :

$$F_{\mathrm{opt}} = (1/4)\left[\sum_{\ell=1}^{L-1} \psi_\ell + \max_{0 \preccurlyeq M \preccurlyeq I,\ 0 \le u \le 1} T(M,u)\right]. \qquad (7)$$

5. Théorème scalaire

Théorème 2 - démontré. Supposons $g_1 \neq 0$ (composante associée à (0,2L)) et $\omega > 0$. Pour $x > \max(0, C-p)$, poser $y = x+p-C$, $P = \mathrm{diag}(1,0)$ et :

$$K(x) = H + V_g/x + (E - D_0 - \omega/y)P.$$
$$F_{opt} = (1/4)[\sum_\ell \psi_\ell + p + D_0 + \min_{x>\max(0,C-p)}\{x + \omega/y + \mathrm{Tr}\, K(x)_+\}]. \qquad (8)$$

La fonction minimisée est convexe, diverge aux frontières et atteint son minimum. K_+ est la partie positive spectrale. Ses deux valeurs propres se calculent par $\lambda\pm = [\mathrm{Tr}\, K \pm \sqrt{((K_{00}-K_{11})^2 + 4|K_{01}|^2)}]/2$. Les cas $g_1 = 0$ ou $\omega = 0$ conservent (7) ; (8) n'est pas invoquée sans étude des limites.

Preuve : majoration. Pour x,y > 0, appliquer $2\sqrt{(ab)} \le xa+b/x$ aux deux racines de (6). Le choix $y = x+p-C$ annule le coefficient de u. Il reste $T(M,u) \le p+D_0+x+\omega/y+\mathrm{Tr}(K(x)M)$. Or $\max_{0\preccurlyeq M\preccurlyeq I}\mathrm{Tr}(KM) = \mathrm{Tr}\, K_+$, d'où la borne.

Preuve : convexité et existence. Après retrait de $p+D_0$, le majorant est le maximum sur M de $x+\mathrm{Tr}(V_gM)/x+\omega(1-M_{00})/(x+p-C)+\mathrm{Tr}((H+(E-D_0)P)M)$. Chaque fonction de x est convexe. Le terme x impose la divergence à l'infini. À $x \downarrow 0$, le choix $M = \mathrm{diag}(0,1)$ utilise $|g_1|^2 > 0$; à $y \downarrow 0$, $M = 0$ utilise $\omega > 0$. Le minimum est intérieur.

Preuve : saturation. Au minimiseur x*, le sous-gradient nul appartient à l'enveloppe convexe des dérivées des effets actifs. Leur ensemble est une face convexe et la dérivée est affine en M : il existe un effet actif M* tel que $1-\mathrm{Tr}(V_gM^*)/x^{*2}-\omega(1-t^*)/y^{*2} = 0$. Définir $u^* = \omega(1-t^*)/y^{*2}$ et $1-u^* = \mathrm{Tr}(V_gM^*)/x^{*2}$. Ces nombres sont non négatifs et somment à un. Les deux majorations de racines deviennent des égalités. Les blocs positifs de la section 4 produisent alors une récupération CPTP atteignant (8).

Si K(x*) possède une valeur propre nulle, un effet actif peut nécessiter une valeur propre strictement entre zéro et un. Le remplacer systématiquement par un projecteur ne serait pas justifié.

6. Spécialisation à un Kraus par perte

Proposition 5 — démontré (spécialisation). Pour un Kraus par ℓ, poser $h_0 = |a_{00}|/\sqrt{2}$, $h_2 = |a_{0,2L}|/\sqrt{2}$, $b = |a_{0,L}|$, $c = |a_{L,2L}|/\sqrt{2}$, $d = |a_{L,L}|$ et $e = |a_{2L,2L}|/\sqrt{2}$. Avec $t_0 = h_0^2/(h_0^2+h_2^2)$, définir $S(t) = (h_0\sqrt{t}+h_2\sqrt{(1-t)})^2$ pour $t \le t_0$ et $S(t) = h_0^2+h_2^2$ au-delà. Alors :

$$\Phi(t,u) = (\sqrt{S(t)}+b\sqrt{(1-u)})^2 + (c\sqrt{u}+d\sqrt{(1-t)})^2 + e^2t,$$
$$F_{opt} = (1/4)[\sum_\ell \psi_\ell + \max_{0\le t,u\le 1}\Phi(t,u)]. \qquad (9)$$

Preuve de la proposition 5. À $M_{00} = t$ fixé, max $h\dagger Mh$ sous $0 \preccurlyeq M \preccurlyeq I$ vaut S(t). Cela suit des bornes $|M_{01}| \le \min(\sqrt{(tM_{11})},\sqrt{((1-t)(1-M_{11}))})$. La première branche est atteinte par le projecteur sur $(\sqrt{t},\sqrt{(1-t)})$; la seconde par un effet qui vaut l'identité sur h. Le score augmente avec $h\dagger Mh$. Enfin S est concave et les termes de moyenne géométrique de (9) sont concaves : Φ est concave.

Pour la perte pure, $a_{\ell n} = \sqrt{(\mathrm{binom}(n,\ell)\gamma^\ell(1-\gamma)^{n-\ell})}$. **vérifié numériquement** : à L=2 et $\gamma \in \{1/100, 1/10, 1/4, 1/2, 3/4, 9/10\}$, la construction étudiée utilise trois Kraus et atteint l'optimum à la précision contrôlée. Deux agissent sur {0,2,4} et le troisième est $|0\rangle\langle 3|+|1\rangle\langle 1|$. Le contrôle joint trouve un rang de Choi 3 au seuil absolu 10^{-10} ; le défaut de trace est inférieur à 2×10^{-12}. L'affirmation pour tout γ est non établie ici. **démontré** : au moins trois Kraus sont nécessaires à tout canal CPTP de dimension 5 vers 2, car chaque $R\dagger R$ a rang au plus deux et leur somme a rang cinq. Cette borne ne dénombre pas les portes physiques.

7. Certificats exacts et contrôles numériques

Pour q rationnel non négatif, B entier positif et k = floor(√floor(qB²)), on a k/B ≤ √q ≤ (k+1)/B. Les multiplications entières contrôlent ces bornes ; les opérations suivantes utilisent des fractions. Un point primal réalisable et le majorant dual de (8), ou le plan tangent global de la fonction concave (9), donnent un intervalle garanti par certificat rationnel. L'arrondi affiché est effectué vers l'extérieur.

Cas fixé et témoin	Borne inférieure	Borne supérieure
Perte pure, L=2, γ=1/10 — pure_L2	0.982466822442956434476	0.982466822442956434477
Perte-déphasage, L=2, γ=1/10, ρ=99/100 — dephasing_L2	0.962135467225612718064	0.962135467225612718065
Même famille, L=64, γ=1/1000, ρ=9999999/10000000 — dephasing_L64	0.999703937563568689684	0.999703937563568689685

démontré par calcul rationnel sur les témoins joints : chacune des trois lignes est contrôlée par verifier_temoins_Z1.py à partir de temoins_Z1.json, y compris L=64. Le cas separation_L2 contrôle aussi son intervalle complet et les trois rangs projectifs. Les fractions fournies sont des témoins réalisables et un paramètre dual, pas des valeurs algébriques exactes de x*, M*, u* ; les bornes prouvent leur précision. Le scalaire x appartient au majorant dual, tandis que M et u décrivent le primal.

Le déphasage multiplie |n⟩⟨m| par $\rho^{(n-m)^2}$. Les lignes changent de bruit et d'énergie : elles ne constituent pas un classement de codes à ressources égales.

démontré, par certificat rationnel. Pour L=2, γ=1/2 et ρ=973056217276309/10^{15}, F_{opt} appartient à [0.634797988202360804479, 0.634797988202360804480]. Toute récupération dont l'effet central M est un projecteur atteint au plus 0.634796181343000948228. L'écart est au moins 0.000018068593596251.

La classe projective est couverte en séparant les rangs 0, 1 et 2. Au rang 1, la phase peut être alignée et M(t) a diagonale (t,1−t) et cohérence √(t(1−t)). Le score est concave en (t,u) ; un plan tangent encadré rationnellement majore tout le carré. Les rangs 0 et 2 ont des majorants explicites plus faibles. Le pincement conserve M, donc la comparaison couvre aussi les récupérations non bloquées ayant un tel effet central. Elle n'exclut pas une dilatation projective sur un espace agrandi.

vérifié numériquement. Les journaux historiques rapportent 8 cas de perte pure et 12 canaux supplémentaires pour la formulation à deux variables ; l'extension multikraus contrôle 8 cas perte-déphasage et 18 canaux complexes à trois Kraus par secteur pour L=2,3. Les matrices de Choi et les contraintes CPTP sont reconstruites. Les résultats ont été produits par le même travail assisté : « formulation distincte » ne signifie pas « équipe indépendante ». Aucun benchmark public difficile de temps ou mémoire ne valide ici un avantage.

8. Reproductibilité, limites et statut

Les témoins des quatre cas et le vérificateur autonome sont fournis dans ARCHIVE-REPRO-Z1, sous les noms temoins_Z1.json et verifier_temoins_Z1.py. La commande « python -B -I verifier_temoins_Z1.py temoins_Z1.json » contrôle les quatre intervalles et la séparation sans solveur, avec la seule bibliothèque standard. Le fichier README.md donne les commandes rejouées et les versions. La proposition de témoins et le contrôle numérique des trois Kraus sont séparés du vérificateur. Aucune campagne de SDP dense n'a été relancée pour ce manuscrit.

Le nombre scalaire de variables d'optimisation n'élimine ni le coût de lecture du canal, ni le calcul des coefficients, ni la précision binaire. La compilation exacte suppose un support connu exactement. Une entrée dense peut ne donner aucune réduction. Les certificats établissent un optimum dans le modèle mathématique, pas une fidélité expérimentale ni une nouveauté bibliographique.

conjecturé. L'oracle pourrait fournir une référence exacte utile aux simulateurs et aux études de récupération adaptée. Le gain réel face à des implémentations spécialisées et la robustesse sous bruit de contrôle restent à mesurer.

Déclarations

Auteur : Zakaria Gharzouli. Contributions déclarées par l'auteur : conception, calculs et rédaction assistés par des outils d'IA, vérifiés par l'auteur ; scripts de reproduction fournis. L'assistance IA a participé à la formalisation, au code, aux calculs et à la rédaction. Elle ne constitue pas une relecture indépendante. Ce texte est une prépublication non évaluée par les pairs. L'auteur déclare n'avoir reçu aucun financement et n'avoir aucun conflit d'intérêts. Licence : CC BY 4.0.

Références

[FSWAD08] Andrew S. Fletcher, Peter W. Shor, Moe Z. Win. Channel-Adapted Quantum Error Correction for the Amplitude Damping Channel. IEEE Transactions on Information Theory 54(12), 5705–5718 (2008). DOI.

[Reimpell05] Michael Reimpell, Reinhard F. Werner. Iterative Optimization of Quantum Error Correcting Codes. Physical Review Letters 94, 080501 (2005). DOI.

[Barnum02] Howard Barnum, Emanuel Knill. Reversing quantum dynamics with near-optimal quantum and classical fidelity. Journal of Mathematical Physics 43(5), 2097–2106 (2002). DOI. La notice arXiv:quant-ph/0004088 signale une correction de preuve en version 2 (2026).

[FSW07] A. S. Fletcher, P. W. Shor, M. Z. Win. Optimum Quantum Error Recovery using Semidefinite Programming. Physical Review A 75, 012338 (2007). Article.

[FSW08] A. S. Fletcher, P. W. Shor, M. Z. Win. Structured Near-Optimal Channel-Adapted Quantum Error Correction. Physical Review A 77, 012320 (2008). Article.

[Michael16] M. H. Michael et al. New Class of Quantum Error-Correcting Codes for a Bosonic Mode. Physical Review X 6, 031006 (2016). Article.

[Albert18] V. V. Albert et al. Performance and structure of single-mode bosonic codes. Physical Review A 97, 032346 (2018). Article.

[Leviant22] P. Leviant, Q. Xu, L. Jiang, S. Rosenblum. Quantum capacity and codes for the bosonic loss-dephasing channel. Quantum 6, 821 (2022). Article.

[Gatermann04] K. Gatermann, P. A. Parrilo. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. Journal of Pure and Applied Algebra 192(1–3), 95–128 (2004). DOI : 10.1016/j.jpaa.2003.12.011. Article.

[Permenter20] F. Permenter, P. A. Parrilo. Dimension reduction for semidefinite programs via Jordan algebras. Mathematical Programming 181, 51-84 (2020). Article.